Université de Abdelmalek Essaadi

FST de Tanger

2011- 2012

Module: Analyse I

Filière : MIPC I

Controle Continu II

Durée 2h

<u>Exercice 1</u> :

1. Montrer, en utilisant la formule de Taylor, que

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ \ 1+x-\frac{x^2}{2} \leq \sqrt{1+2x} \leq 1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}.$$

2. En utilisant le développement limité calculer les limites suivantes :

   (a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x - cos(x)}{1-\sqrt{1-x^2}}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$

<u>Exercice 2</u> : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

1. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. En déduire la valeur de I_3.

<u>Exercice 3</u> : On définit l'intégrale suivante

$$J(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{t}{t+1}} \frac{dt}{(2t^2+2t+1)}$$

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante :

$$f(x) = \frac{x^2}{x^4+1}.$$

2. En déduire une primitive de f.

3. A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{\dfrac{t}{t+1}}$ calculer $J(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} J(x)$

$(1+t^2)(1+t^2)\ldots - (1+t^2)^n$

$(1+t)t^2 \quad 1+(1+t^2) \quad (1+t^2)^n(1+t)^{n+1}$




ETUSUP.com